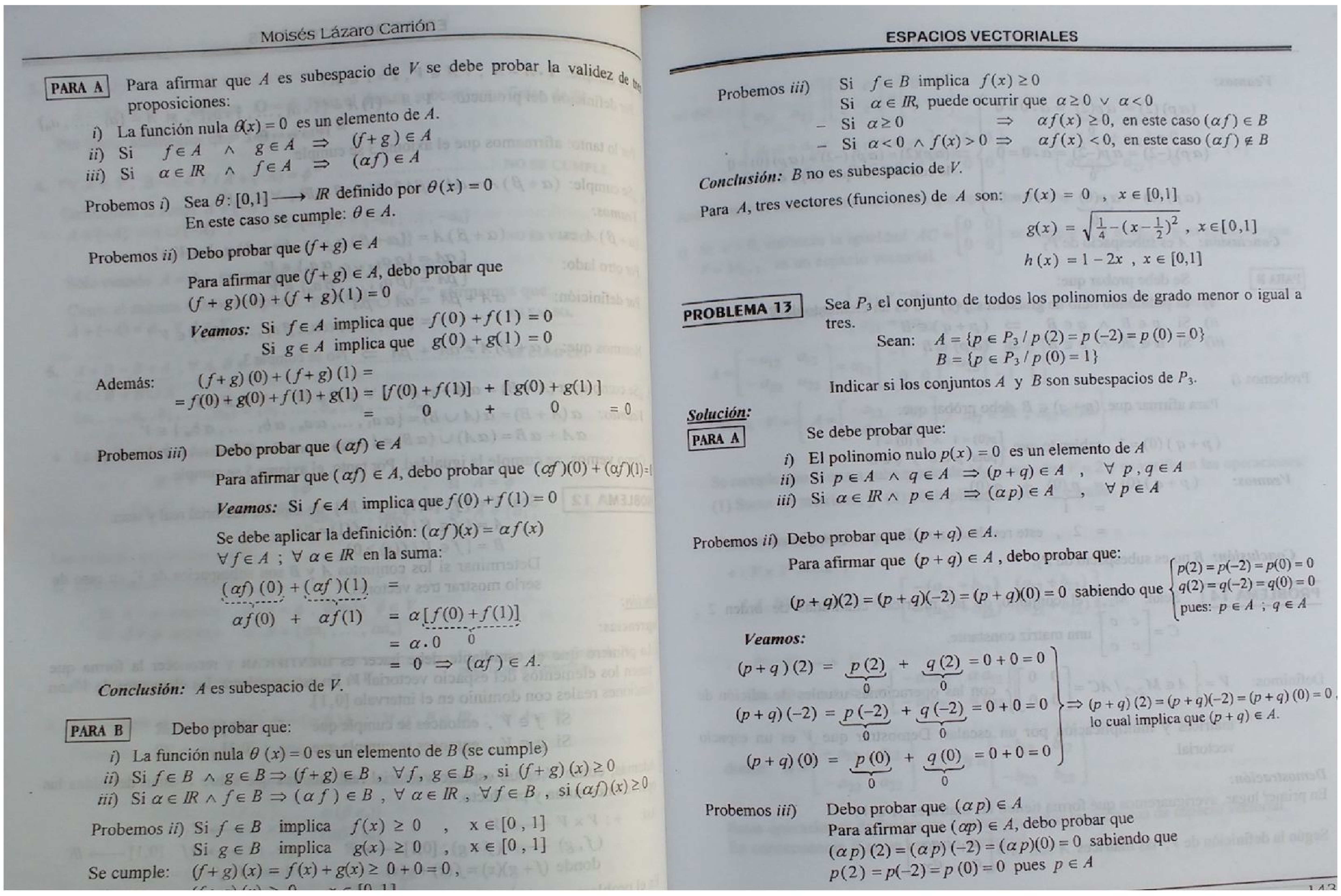



**PARA A** Para afirmar que $A$ es subespacio de $V$ se debe probar la validez de tres proposiciones:

*i)* La función nula $\theta(x)=0$ es un elemento de $A$.
*ii)* Si $f\in A \wedge g\in A \Rightarrow (f+g)\in A$
*iii)* Si $\alpha\in I\!R \wedge f\in A \Rightarrow (\alpha f)\in A$

Probemos *i)* Sea $\theta:[0,1]\longrightarrow I\!R$ definido por $\theta(x)=0$
En este caso se cumple: $\theta\in A$.

Probemos *ii)* Debo probar que $(f+g)\in A$

Para afirmar que $(f+g)\in A$, debo probar que
$(f+g)(0)+(f+g)(1)=0$

***Veamos:*** Si $f\in A$ implica que $f(0)+f(1)=0$
Si $g\in A$ implica que $g(0)+g(1)=0$

Además: $(f+g)(0)+(f+g)(1)=$
$=f(0)+g(0)+f(1)+g(1)=[f(0)+f(1)]+[g(0)+g(1)]$
$= \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = 0$

Probemos *iii)* Debo probar que $(\alpha f)\in A$

Para afirmar que $(\alpha f)\in A$, debo probar que $(\alpha f)(0)+(\alpha f)(1)=$

***Veamos:*** Si $f\in A$ implica que $f(0)+f(1)=0$

Se debe aplicar la definición: $(\alpha f)(x)=\alpha f(x)$
$\forall f\in A$ ; $\forall\alpha\in I\!R$ en la suma:

$$\begin{aligned}(\alpha f)(0)+(\alpha f)(1) &=\\ \alpha f(0)+\alpha f(1) &= \alpha\underbrace{[f(0)+f(1)]}_{0}\\ &=\alpha\cdot 0\\ &=0\Rightarrow(\alpha f)\in A.\end{aligned}$$

***Conclusión:*** $A$ es subespacio de $V$.

**PARA B** Debo probar que:

*i)* La función nula $\theta(x)=0$ es un elemento de $B$ (se cumple)
*ii)* Si $f\in B \wedge g\in B\Rightarrow(f+g)\in B$, $\forall f,g\in B$, si $(f+g)(x)\geq 0$
*iii)* Si $\alpha\in I\!R\wedge f\in B\Rightarrow(\alpha f)\in B$, $\forall\alpha\in I\!R$, $\forall f\in B$, si $(\alpha f)(x)\geq 0$

Probemos *ii)* Si $f\in B$ implica $f(x)\geq 0$, $x\in[0,1]$
Si $g\in B$ implica $g(x)\geq 0$, $x\in[0,1]$

Se cumple: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)\geq 0+0=0$,



Probemos *iii)* Si $f\in B$ implica $f(x)\geq 0$
Si $\alpha\in I\!R$, puede ocurrir que $\alpha\geq 0 \vee \alpha<0$
– Si $\alpha\geq 0 \Rightarrow \alpha f(x)\geq 0$, en este caso $(\alpha f)\in B$
– Si $\alpha<0\wedge f(x)>0\Rightarrow \alpha f(x)<0$, en este caso $(\alpha f)\notin B$

***Conclusión:*** $B$ no es subespacio de $V$.

Para $A$, tres vectores (funciones) de $A$ son: $f(x)=0$, $x\in[0,1]$
$g(x)=\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}$, $x\in[0,1]$
$h(x)=1-2x$, $x\in[0,1]$

**PROBLEMA 13** Sea $P_3$ el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a tres.

Sean: $A=\{p\in P_3 / p(2)=p(-2)=p(0)=0\}$
$B=\{p\in P_3 / p(0)=1\}$

Indicar si los conjuntos $A$ y $B$ son subespacios de $P_3$.

***Solución:***

**PARA A** Se debe probar que:

*i)* El polinomio nulo $p(x)=0$ es un elemento de $A$
*ii)* Si $p\in A\wedge q\in A\Rightarrow(p+q)\in A$, $\forall p,q\in A$
*iii)* Si $\alpha\in I\!R\wedge p\in A\Rightarrow(\alpha p)\in A$, $\forall p\in A$

Probemos *ii)* Debo probar que $(p+q)\in A$.

Para afirmar que $(p+q)\in A$, debo probar que:

$(p+q)(2)=(p+q)(-2)=(p+q)(0)=0$ sabiendo que $\begin{cases}p(2)=p(-2)=p(0)=0\\ q(2)=q(-2)=q(0)=0\\ \text{pues: } p\in A\ ;\ q\in A\end{cases}$

***Veamos:***

$$\left.\begin{aligned}(p+q)(2)&=\underbrace{p(2)}_{0}+\underbrace{q(2)}_{0}=0+0=0\\ (p+q)(-2)&=\underbrace{p(-2)}_{0}+\underbrace{q(-2)}_{0}=0+0=0\\ (p+q)(0)&=\underbrace{p(0)}_{0}+\underbrace{q(0)}_{0}=0+0=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow (p+q)(2)=(p+q)(-2)=(p+q)(0)=0,$$
lo cual implica que $(p+q)\in A$.

Probemos *iii)* Debo probar que $(\alpha p)\in A$
Para afirmar que $(\alpha p)\in A$, debo probar que
$(\alpha p)(2)=(\alpha p)(-2)=(\alpha p)(0)=0$ sabiendo que
$p(2)=p(-2)=p(0)=0$ pues $p\in A$

1dff872cbc